"Devemos julgar um homem mais pelas suas perguntas que pelas respostas". Voltaire

1ºano – Curso Eletromecânica

Matemática– Lista 06

Prof. Osnildo Carvalho

http://osnildo.wordpress.com/
osnildocarvalho@yahoo.com.br

Logaritmos

Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1=P_0.1{,}012$
2 anos	$P_2=(P_0.1{,}012)1{,}012= P_0.(1{,}012)^2$
3 anos	$P_3= P_0(1{,}012)^3$
. . .	. . .
X anos	$P_x= P_0.(1{,}012)^x$

Supondo que a produção dobrará após x anos, temos:

$P_x=2P_0$ daí: $P_0.(1{,}012)^x=2P_0 \leftrightarrow 1{,}012^x=2$

Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui.

Com isso vamos desenvolver a noção de logaritmo.

(Extraído de: DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática: Conceitos & aplicações***. Editora Ática. 4ª edição.2007)

Um pouco de história

Há cerca de 400 anos, em 1614, o escocês John Napier revolucionaria os métodos de cálculo da época com a invenção dos logaritmos. O logaritmo de Napier não era exatamente o que usamos hoje, nem era associado ao conceito de expoente, mas a essência era a mesma.

Naquela época, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram trabalhos extremamente árduos, que eram feitos a partir de senos.

Hoje em dia, com o advento das calculadoras eletrônicas, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não é mais uma dificuldade. Nem por isso os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoentes (mérito do Inglês John Wallis em 1685) e a idéia de base para logaritmos (do galês William Jones em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Entenda o logaritmo de um número

Exemplos:

a)$2^{@}=8$ @=?

A que nº se deve elevar o 2 para se obter o 8). Esse resultado é o logaritmo de 8 na base 2, sendo representado como $\log_2^8$

b)5*=1 *=?

c)$4^{\Delta}=\frac{1}{16}=0$ Δ=?

Definição:Dado os números reais positivos N e b, com b≠1, o logaritmo de N na base b é denotado como

$$\log_b^N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

Onde N é o logaritmando, b a base e x o logaritmo

1)Encontre o valor dos logaritmos:

a) $\log_2^{128}$ b) $\log_{\sqrt{3}}^{9}$

c) $\log_{\frac{1}{9}}^{3\sqrt{3}}$ d) $\log_2^{0,25}$

2)Sabe-se que $\log_a^{25}=2$. Encontre a.

3)Calcule o número real A sabendo que

A= $\log_{10}^{0,001}+\log_2^{\frac{1}{16}}$

4)Calcule $\log_2^{(\log_3 81)}$

Condição de existência (domínio):

$\log_b^N = x \Leftrightarrow b^x = N$, N>0, b>0 e b≠1

1)Determine os valores reais de x para os quais existe:

a) $\log_2 x-3$ b) $\log_{\frac{1}{3}} x^2-7x+10$

c) $\log_{x-2} x+5$

Conseqüências da definição:

I) $\log_b^1 = 0$, pois, $b^0=1$

II) $\log_b^b = 1$, pois, $b^1=b$

III) $\log_b^{b^n} = n$, pois, $b^n=b^n$

IV) $b^{\log_b^n} = n$, pois, sendo $\log_b n = x \rightarrow b^x = n$

V) $\log_{b^n}^b = \frac{1}{n}, pois, (b^n)^{\frac{1}{n}} = b$

VI)antilog$_b$a = b^a, pois, $\log_b b^a = a$

Ex)Encontre o valor:

a) $\frac{\log_5 125 - \log_\pi 1}{\log_{2\sqrt{2}} 16 + \log_\pi \pi}$

Propriedades: (N>0, N≠1, a>0,c>0)

1) $\log_N^{a.b} = \log_N^a + \log_N^b$

2) $\log_N^{\frac{a}{b}} = \log_N^a - \log_N^b$

3) $\log_N^{a^x} = x.\log_N^a$

4) $\log_N^{\sqrt[n]{a}} = \frac{\log_N^a}{n}$

5) $Co\log_N^a = \log_N^{\frac{1}{a}} = -\log_N^a$

Sistema de logaritmos:

Chamamos de sistema de logaritmos de base o conjunto formado pelos logaritmos, nessa base, de todos os números reais positivos. Os sistemas mais usados são:

Logaritmos decimais: Os logaritmos de base 10.

O logaritmo decimal de um nº x real positivo é indicado por logx (ficando implícito que a base é 10) ou seja: $\log_{10}x = \log x$.

Logartimos naturais ou neperianos: os logaritmos que têm a base o número "e" ,em homenagem a Napier.

O nº e= 2,718... é irracional, sendo $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Notação: $\log_e x = \ln x$

Exemplos:

1)Dados $\log_a m = 11$ e $\log_a n = 6$, qual é o valor de $\log_a(m^3n^2)$

2)Sabendo que log2 = 0,30 e log3=0,48, usando as propriedades, encontre:

a)log6

b)log12

c)log200

d)log5

e)$\log_2 3$

Mudança de base: $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

1)Calcule o valor da expressão $\log_3 5.\log_{25} 81$

Com o auxílio da calculadora encontre os valores abaixo (caso não tenha uma calculadora a disposição, indique o roteiro para efetuar o cálculo):

a)log64,3

b)log0,00196

c)x tal que logx=1,35

d)log914

e)x tal que logx=-1,155

e)x= $\sqrt[3]{429}$

f)x=$3^{4,27}$

Aplicações:

1)Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal do inverso da respectiva concentração de H_3O^+(íon de hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de H_3O^+ é 4,8. 10^{-8}mol/l (em média). Qual será o pH desse líquido?

Aplicação na resolução de equações exponenciais:

1)Resolva a equação $3^x=5$

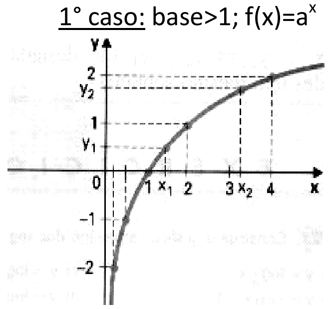
2)Dados log2=0,30;log3=0,48 e log5=0,70, resolva a equação $5^{2x}-7.5^x+12=0$

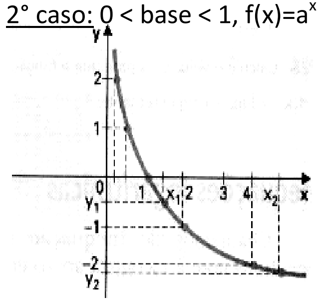
3)Sabemos que o número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t, é dado por $N=N_0.e^{rt}$, em queN_0 é o número inicial (quando t=0) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% ao minuto?

4)Resolva a situação inicial do inicio de logaritmos

A Função logarítmica é a inversa da função exponencial, logo o gráfico é simétrico a 1ª bissetriz.

<u>1° caso:</u> base>1; $f(x)=a^x$ <u>2° caso:</u> 0 < base < 1, $f(x)=a^x$





Características:
1.Domínio = os n° reais positivos (D = $\mathbf{R}_+^*$)
2.Imagem = os n° reais (D = **R**)
3.Crescimento:*Crescente:* base > 1 e *decrescente:* 0< base< 1
4.Intercepta o eixo 0x no ponto (1,0)
5. Assintótica: aproxima do eixo 0y mais não toca.
Esboce os gráficos a seguir:
a)y=$\log_5 x$ b)=$\log_{0,1} x$

c)y=$\log_{1/3}(x-3)$ d)y=log|x|

e)y=$\log_{1/2}$ -x f)y=- $\log_2 x$

g)|$\log_{1/2} x$|

Equações logarítmicas
Exemplos:
a)$\log_3 x=5$ b)$\log_{x-1} 3=2$

c)$\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=1$ d)2.logx=log2x-log3

e)$\log_2(\log_3 x)=2$

f)$\begin{cases}\log_{10} x - \log_{10} y = 10 \\ 4^{x-y} - 16\end{cases}$

Inequações logaritmicas
<u>1° caso</u>: quando a base>1; (Mantém a desigualdade)
$$\begin{cases}\log_b^{f(x)} > \log_b^{g(x)} \Rightarrow \text{f(x)} > g(x) \\ \log_b^{f(x)} > k \Rightarrow f(x) > b^k\end{cases}$$
$$ex.:\log_2^x > \log_2^8 \Rightarrow x > 8$$
<u>2° caso:</u> quando a 0 < base < 1, (Muda a desigualdade)
$$\begin{cases}\log_b^{f(x)} > \log_b^{g(x)} \Rightarrow \text{f(x)} < g(x) \\ \log_b^{f(x)} > k \Rightarrow f(x) < b^k\end{cases}$$
$$ex.:\log_{\frac{1}{2}}^x > \log_{\frac{1}{2}}^8 \Rightarrow x < 8$$
Exemplos:

a)$\log_2(x+1)> \log_2 6$

b) $\log_3 x$+log(x-8)<2

c)explicite o domínio da função f(x)=$\sqrt{\log(x-2)}$

Logaritmo decimal é aquele que a base é 10
Logaritmando sendo uma potencia de 10.
Log10.000=$\log 10^4$= 4
Log1000 = $\log 10^3$= 3
Log100 = $\log 10^2$= 2
Log10 = $\log 10^1$ = 1
Log1 = $\log 10^0$ = 0
Log0,1 = $\log 10^{-1}$= -1
Log0,01 = $\log 10^{-2}$= -2
Log0,001 = $\log 10^{-3}$= -3

Basta contar a quantidade de zeros. Se o logaritmando for maior que 1 será positivo, caso contrário negativo.

Quando o logaritmo for decimal e o logaritmando não for uma potência de 10: é formado por duas partes logx =C+M
C= Caracteristica (parte inteira) e M= mantissa parte decimal)
A característica do logaritmo decimal de um nº x>1, é dado pela quantidade de algarismo que compõe a parte inteira menos uma unidade
Ex.:log32=1,... ; log4356,98=3,...
Nº 0<x<1, é dado tomando a quantidade de zeros que x apresenta antes do 1º algarismo não nulo e colocando o sinal negativo no nº encontrado.
Ex.: log0,03=-2,..; log0,201=-1,...; log0,000 0032=-6,...
Obs.: Se dois números em suas representações deciamis diferem apenas na posição da virgula, suas mantissas são iguais.
Ex.: log2=0,301; log20=1,301; log2000=3,301;
Atenção log0,0002= -4+0,301=-3,9699

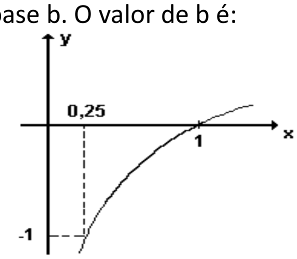
Exercícios

1-(UNEB) Sendo log2= 0,3010 e log3=0,477, pode-se afirmar que log (0,06) é igual a

a)-2,222 b) -1,222 c) -0,778 d)1,222 e)1,778

2-(FUVEST) O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:
a) $\log_2 5$ b)$\log_2 \sqrt{3}$ c)2 d)$\log_2 \sqrt{5}$ e) $\log_2 3$

3-(FUVEST) A figura a seguir mostra o gráfico da função logaritmo na base b. O valor de b é:



a) 1/4. b) 2. c) 3. d) 4. e) 10.

4-(FUVEST) O número x >1 tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:
a) √2/2 b)$2^{\sqrt{2}}$ c) √2 d)2√2 e)$4^{\sqrt{2}}$

5-(UNITAU)Se $2^{\log_2 n^2} = x$ Então o(s) valor(es) real(is) de n que satisfaz(em) x^2-x=0 é(são):
a) 0 e 1. b) 1. c) 0. d) 0 e -1. e) -1 e 1.

6-(UNITAU) O domínio da função y = $\log_x (2x-1)$ é:
a) x > 1/2 b) x > 0 c)x < 1/2 e x≠1 d)x>1/2 e x≠ 1 e) x ≠1/2

7-(UNITAU) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de I=0 até I=8,9 para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = (2/3)\log_{10} E/E_o$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_o=7\times10^{-3}$kWh.
a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

8- (FUVEST) Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:
a) 2/n b) 2n c) 2 + n^2 d) 2 + 2n e) (2 + 2n)/n

9-(UNESP) Seja n>0, n·1, um número real. Se $\log_n x=3 \log_{10} x$ para todo número real x>0, x≠1, então:
a) n = 3 b) n = 10/3 c) n = 30 d) n = $\sqrt[3]{10}$ e) n = 10^3

10-(uel) Quaisquer que sejam os números reais positivos a, b, c, d, x e y, a expressão
$\log_2(a/b) + \log_2 (b/c) + \log_2 (c/d) - \log_2 (ay/dx)$
pode ser reduzida a:
a) $\log_2 (y/x)$ b) $\log_2 (x/y)$ c) 1 d) 0 e) $\log_2 (a^2y/d^2x)$

11-(FGV) Adotando-se os valores log2=0,30 e log3=0,48, a raiz da equação $5^x = 60$ vale aproximadamente:
a)2,15 b) 2,28 c) 41 d) 2,54 e) 2,67

12-(PUC) Considere a função f: IR_+*→ IR definida por f(x)=$\log_2 x$ e a,b∈ R_+*, sendo a>b. Se f(ab)=4 e a+b=10, o valor de a-b é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

13-(Ufmg) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão pH = - log $[H^+]$,
em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/l, de íons de Hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de Hidrogênio era $[H^+] = 5,4.10^{-8}$mol/l.
Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.
Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi
a)7,26 b) 7,32 c) 7,58 d) 7,74

14-(FUVEST) Se log8=a, então log5 vale:
a)a^3 b)5^a-1 c)2^a/3 d)1+a/3 e)1-a/3

15-(UNEB) Sabendo-se que $\log_2{}^{x=}3\log_2 27 + \log_2 1/9$, pode-se concluir que $\log_3 x$ é igual a:
a) –1 b)0 c)3 d)9 e)7

16-(UEFS) Se log(x+2)=logy – log(x+1), x>-1 e y>0, então y é igual a:
a)(x+2)/(x+1) b)(x+1)/(x+2) c)x^2+3x +2 d)x^2-3x+2 e)x^2+2x+1

17-(UEFS)Se $\frac{3}{\log_2^x}+\frac{2}{\log_3^x}+\frac{1}{\log_5^x}=2$, então x^2 é igual a:
a)80 b)120 c)260 d)320 e)360

18-(UESC) Se S é o conjunto solução da inequação $\log_2\left(\frac{5}{3-x}\right)>0$, então
01)S⊂]-3,4] 02)]-∞,-1]⊂S 03)]-3,4]⊂S 04)[4, +∞]⊂S
05)S⊂ [1, +∞ [

19-(UEFS) Se f é uma função real definida por f(x)=a^x, a>0, então o valor de x_o, tal que f(x-x_o)=4f(x+x_o) é
A) – $\log_a 1/2$ B) -$\log_2 a$ C) $\log_2 a$ D)$\log_a 1/2$ E)1/$\log_2 a$

20.(UNEB) Se log2= 0,30 e log3= 0,48, então o logaritmo decimal de 3600 é igual a
A)1,56 B)2,144 C)2,78 D)3,56 E)4

21.(UEFS) Sendo f(x) = $\log_2[1+\log_3(1-2x)]$, o valor real de x, para o qual f(x)=2, é
01)-13 02)-3/5 03)0 04)1/2 05)26

22.(UESB) Com base nas propriedades de logaritmos, pode-se afirmar:
01)$\log a^2=(\log a)^2$ 02)$\log_2 4=\log_4 2$ 03)log15 = log5.lo3
04) Se log9 =0,95, então log90=9,5
05)Se log2=a e log5=b, então a+b =1

23.(UEFS) Sobre logaritmos, é correto afirmar:
01) Se $16^{-1}\le x\le\sqrt{8}$, então $-4\le\log_2 x\le 3/2$
02)log6 = log2.log3
03) log0,001 <log0,0001
04)$\log_3\sqrt{27}=3$
05)log(x-1)=log(1-x)

24.(UEFS) Sobre a equação log(2.10^x-10)-log(10^x-9) = x, pode-se afirmar:
01)Não possui raízes
02)Tem apenas uma raiz, que é negativa.
03)Tem apenas uma raiz, que é positiva.
04)Tem duas raízes inteiras
05)Tem duas raízes irracionais.

25.(UEFS) O produto das raízes da equação log(x^2-7x+14)=2log2 é

01)5 02)7 03)10 04)14 05)35

26.(UNEB) O valor da expressão

$\log 2 - \log \frac{1}{0{,}0001} + \log 5 + \log_{\sqrt{2}}^{8}$ é igual a

01)3 02)4 03)10 04)11 05)15

27.(UEFS) Se $\log_{(a-b)} c = 5$ e $\log_{(a+b)} c = 4$, então o valor de $\log_c(a^2-b^2)$ é

A)1/20 B)9/20 C)1 D)9 E)0

28.(UEFS) O número real x que satisfaz a equação $\log(20-8.10^x)=2x$, pertence ao conjunto

01) [-log√3, -log√2] 02)[-log10, log1] 03)[log1, log3]
04)[log3,log5] 05)[log7, log10]

29.(UCSAL) O conjunto solução da equação logx=1/5.(2log8+4.log2), no universo U=IR, é

A){2} B){3} C){4} D){5} E){6}

30.(UCSAL) Se o número real x é tal que $\log_3 x = \log_9 2x$, então é verdade que

A)x é um número primo B)$x^2=9$
C)√x é um número racional
D)2x=1 E) x/3 é um número inteiro

31. (UNIFESP) O valor de x que é solução da equação log2 + log(x + 1) - logx = 1 é

a)0,15. b) 0,25 c) 0,35. d) 0,45. e) 0,55.

32. (Cesgranrio) O valor de $\log_a(a\sqrt{a})$ é:

01)3/4 02)4/3 03)2/3 04)3/2 05)5/4

33.(MACK) O valor da expressão

$\log_{0,04}125 - \log_8\sqrt{32} + \log_{1000}0{,}001$ é:

a)-3/10 b)-10/3 c)20/6 d)-10/2 e)-9/8

34.(PUC) Se $\log_2(\log_{1/2}x)=0$, então x é igual a:

a)1/2 b)0 c)1 d)√2 e)2

35. Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

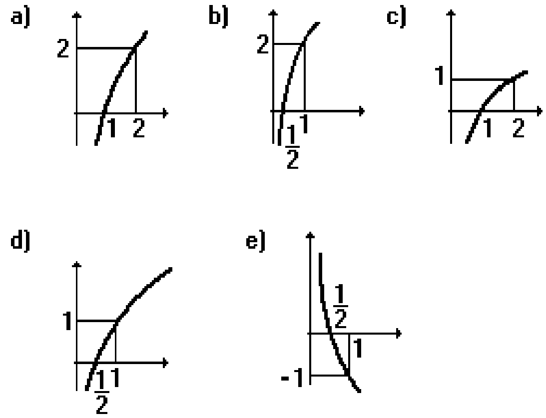
a) 2/n b) 2n c) 2 + n^2 d) 2 + 2n e) (2 + 2n)/n

36. Supondo-se que log 2 = 0,30, a solução da equação $10^{2x-3} = 25$, universo U = IR, igual a

a) 2 b) 2,1 c) 2,2 d) 2,35 e) 2,47

37. Se os números reais positivos a e b são tais que $\begin{cases} a-b=48 \\ \log_2 a - \log_2 b = 2 \end{cases}$, calcule o valor de a + b.

38. Qual das figuras a seguir é um esboço do gráfico da função $f(x)=\log_2 2x$?



39. Pode-se afirmar que o valor de log 18 é igual a:

a) log 20 - log 2 b) 3 log 6 c) log 3 + log 6
d) log 36 / 2 e) (log 3) (log 6)

40. Se $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$, então $\log_5 7$ é igual a

a) a + b b) a – b c) a/b d) a .b e) a^b

GABARITO- logaritmos										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	b	e	d	b	e	d	*	e	d
1	b	d	c	c		e	c	e		
2	d	01	05	01		03	01	b	03	a
3	a	b	04	b	a					

7-a) E = 7 . 10ª kWh

Curiosidade:

4 é maior que 5???

Vamos verificar:

Começamos com a seguinte inequação:

(1/81)>(1/243)

Ou seja:

$(1/3)^4>(1/3)^5$

Aplicando o logaritmo decimal dos dois lados obtemos:

$\log_{10}(1/3)^4>\log_{10}(1/3)^5$

Aplicando a propriedade da potência dos logaritmos temos:

$4 \log_{10}(1/3)>5 \log_{10}(1/3)$

Dividindo ambos os lados por $\log_{10}(1/3)$ chegamos a conclusão:

4>5