INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA
Santo Amaro

O ignorante afirma, o sábio duvida, o sensato reflecte.Aristóteles

1ºano – Curso Eletromecânica
Matemática
Prof. Osnildo Carvalho

http://osnildo.wordpress.com/
osnildocarvalho@yahoo.com.br

Números Complexos

Resolva a equação $x^2+4=0$ nos números reais.

Agora resolva nos números complexos, adotando $i=\sqrt{-1}$, com unidade imaginária. *Em Engenharia será* $j=\sqrt{-1}$

Potências de i.

$i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, ..., $i^n=i^{\text{resto de } n/4}$

$i^{257}=$ $i^{1234585}=$

Forma retangular, binomial ou padrão:

Z=a+bi, Parte real $Re_{(z)}=a$ e Parte imaginária $Im_{(z)}=b$,
(*Em Engenharia será Z= a+jb*)

Ex.:a) w= 5-3i

b)z=i+3

c)z=4i

d)w=8

Quando: $Im_{(z)}=0$, o nº é dito Real

Quando $Re_{(z)}=0$ e $Im_{(z)}\neq0$,o nº é dito imaginário puro.

Ex.: Encontre x e y, de modo que o número complexo z= (2x-4)+(6-y)i, seja:

a)um nº real; b)um nº imaginário puro;

Igualdade entre números complexos:

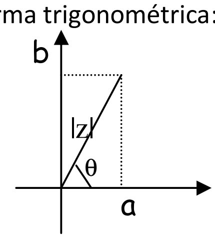
Z=a+bi e W=c+di, Z=W$\Leftrightarrow$a=c e b=d.

Ex.: Para quais valores de m e n, os complexos z=4+n+(2m-6)i e w=10-8i, sejam iguais

Conjugado: Z=a+bi $\rightarrow \bar{z}$ =a-bi
(*Em Engenharia será Z*= a-jb*) Basta troca o sinal da parte imaginária

OBS: $z.\bar{z} = (a+bi).(a-bi)= a^2-(bi)^2= a^2-b^2i^2= a^2+b^2$ (norma de z)

Forma trigonométrica: Z=|z|(cosθ+isenθ)



$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$

$tg\theta \frac{b}{a}$ e $\theta = tg^{-1}\frac{b}{a}$

(a,b) é o afixo e θ (teta) é o argumento

$|z|^2 = a^2+b^2$, (Rô) ρ=|z|

Para chegar n a forma polar basta fazer: a=|z|cosθ e b=|z|senθ, depois substituir na forma retangular z=a+bi, daí temos Z=|z|cosθ+i|z|senθ =

|z|(cosθ+isenθ)

Em Engenharia a forma polar será |Z|< θ

Represente os números complexos no plano, determinando o argumento e o módulo em seguida encontre a forma polar:

a)$z=5+5\sqrt{3}\,i$ b)z=-4-4i

c)z=6 d)z=3i

e)z=-8 f)z=-7i

Operações na forma polar

Sejam os nº complexos:

$Z_1=|z_1|$ ($\cos\theta_1+i\text{sen}\theta_1$) $Z_2=|z_2|$ ($\cos\theta_2+i\text{sen}\theta_2$)

Multiplicação: $Z=|z_1|.\ |z_2|$ ($\cos(\theta_1+\theta_2)+i\text{sen}(\theta_1+\theta_2)$)

Em Engenharia: $|Z_1|\,|Z_2| < \vartheta_1 + \vartheta_2$

Divisão: $Z=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\text{sen}(\theta_1-\theta_2))$

Em Engenharia: $\frac{|Z1|}{|Z2|} < \vartheta_1 - \vartheta_2$

Potenciação: $Z^n=|z|^n(\cos(n.\ \theta)+i\text{sen}(n.\ \theta))$

Em Engenharia: $|Z^n| < n.\vartheta$

Radiciação:

$$W_k = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+360^o}{n} + i.sen\frac{\theta+360^o}{n}\right),$$

onde $k = 0,1,2,...,n-1$

Ex: Dado os nº complexos: $Z=4(\cos60^0+i\text{sen}60^0)$ e $w = 2(\cos30^0+i\text{sen}30^0)$, encontre:

a)z.w

b) $\frac{z}{w}$

c)z^3

Ex.:Encontre as raies cúbicas de z=8.

Absurdo: -1=1, veja:

-1=i^2*=i.i=*$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1}$ *=1*

Encontre o erro do raciocínio

<u>QUESTÕES</u>

1.(UFMS) Se (1 + ai).(b - i) = 5 + 5i, com a e b ∈ IR, então a e b são raízes da equação

a) $x^2 - x - 6 = 0$ b) $x^2 - 5x - 6 = 0$ c) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$ e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2-(Fuvest) Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo (2+i)/(α +2i) é zero, então α é:

a) - 4. b) - 2. c) 1. d) 2. e) 4.

3-(Uel) A forma algébrica do número complexo z=(1+3i)/(2-i) é

a) 1/2 - 3i b) 5/3 + (7i/3) c) -1/5 + (7i/5)

d) -1/5 + 7i e) 3/5 + (4i/5)

4-(Unitau) Determine o valor de k, de modo que z=(1/2k-1/2)+i seja imaginário puro:

a) -1/2. b) -1. c) 0. d) 1/2. e) 1.

5-(Unitau) A expressão $i^{13}+i^{15}$ é igual a:

a) 0 b) i. c) - i. d) - 2i. e) 3i.

6-(Fatec) O conjugado do número complexo $z=(1-i^{-1})^{-1}$ é igual a

a) 1 + i b) 1 – i c) (1/2) (1 - i) d) (1/2) (1 + i)

e)i

7-(Fei) Escrevendo o número complexo z=1/(1-i)+1/(1+i) na forma algébrica obtemos:

a) 1 – i b) i – 1 c) 1 + i d) i e) 1

8-(Fei) O módulo do número complexo $(1 + i)^{-3}$ é:

a) √2 b) 1 c) –3 d) (√2)/4 e) 0

9-(Unitau) O módulo de $z=1/i^{36}$ é:

a) 3. b) 1. c) 2. d) 1/36. e) 36.

10-(UEFS) Considere o número complexo z= 2 + 2i . O menor número natural não nulo, n, tal que z^n tem a parte imaginária nula é igual a:

a)2 b) 3 c) 4 d)5 e)6

11-(UEFS) Se o número complexo z = a+bi, em que a e b pertencem a **R***, é tal que |z+i|= |z+1|=1, então |z|é igual a

A)1 B) √2 C) √3 D) 2 E)3

12-(UEFS) Se o número complexo z é tal que z +2$\overline{z}$ = $\overline{3-2i}$, então a soma da parte real de z com a parte imaginária é igual a
A)5 B)3 C)1 D) -1 E) –2

13-(UESB) O número complexo z=$6i^{25}+(2i)^6+(i)^{-3}$ é igual a
01) 65-6i 02) 5-64i 03) –64+5i 04) –64+7i 05) –65+6i

14-(UESB)O número complexo $\left(\dfrac{5-5i}{5+5i}\right)^{35}$, é igual a
01)-1 02) –i 03) i 04) 2^{35} 05)5^{35}

15-(UFBA) Considerando-se os números complexos z=√3+i e w=1+i, é correto afirmar:
(01)| $\overline{z}$.w| = 3√2
(02)w^2-2z é um número real
(04) z^2=4(cos60º+i sen60º)
(08) z/w=(1+i)/2
(16)Se v=a+bi e v.w=3i, então 2a+4b=9.

16-(UEFS) Sabendo-se que os números complexos z_1 e z_2 satisfazem à relação $\overline{z}_1 + \dfrac{2}{1+i^5} = \overline{z_1 + z_2}$, conclui-se que o módulo de z_2 é igual a
A)1 B)2 C)3 D)√ 2 E)√ 3

17-(UEFS) Sabendo-se que a parte real do número complexo $z = \dfrac{2+\alpha i}{-4-3i}$ é zero, o valor de α é igual a
01) –8/3 02)-3/8 03)2/3 04)3/2 05)4

19-(UNEB) Se i é unidade imaginária, então $i^{25}+i^{39}-i^{108}+i.i^{50}$ é igual a
A) –1 –i B) –1 +i C) 1-i D)1+i E)0

20.(UEFS) Se z é o número complexo cujo afixo é o ponto (2,-1) e w= 10/(3-i), então o módulo do complexo z^2-w é igual a
01)2 02√10 03)5 04) √ 27 05) √ 29

21.(UEFS) Se 1+i é uma raiz da equação $x^2+bx+c=0$, então b^c é igual a
01)-4 02)-2 03)1 04)2 05)4

22.(FAAP) Determine a e b ∈**R** de modo que $\dfrac{1-2i}{3+i^3} = a+bi.$

23.(UFRN) O módulo do complexo 3+4i é igual a:
a)4 b)5 c)7 d)9 e)12

24.(Mack) O valor da expressão
y = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5+...+i^{1001} é :
a)1 b)i c) – i d)-1 e)1+i

25.O valor de $z = \dfrac{(2+i)^{51}.(i-3)^{43}}{(3-i)^{42}.(-2-i)^{52}}$ é:
a)-1-i b)-1+i c)i d)1-i e)1+i

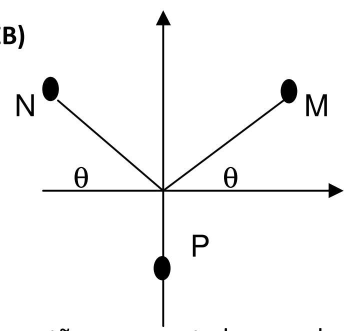
26.(UEFS) considerando-se o número complexo $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, pode-se afirmar que z^7 é igual a

a) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ d) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

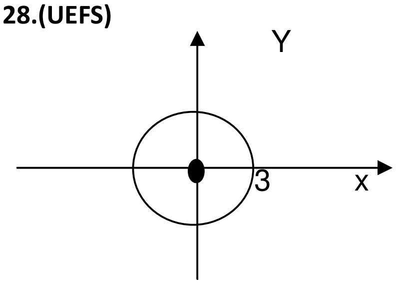
e) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

27.(UNEB)



Na figura, estão representados, no plano complexo, os pontos M,N e P, afixos dos números complexos m,n e p. Sabendo-se que |m|=|n|=|p|=1 e que θ = 45°, pode-se afirmar que m –n +2p é igual a
01) -$\sqrt{2}$ 02) -$\sqrt{2}$ i 03)1-$\sqrt{2}$ i
04) $\sqrt{2}$ -i 05) $\sqrt{2}$ -2i

28.(UEFS)

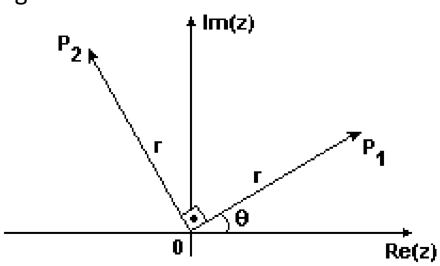


No plano complexo, o conjunto S dos pontos representados na figura, constituído pela origem do sistema de coordenadas e pelos pontos da circunferência, é o conjunto-solução da equação
a)z^2=9 b) $\overline{z}.z^2 = 9z$ c) $\overline{z}.z^2=9\overline{z}$
d)z.$\overline{z}$=9 e)z. $\overline{z} = \dfrac{9z}{\overline{z}}$

29.(ITA) Seja z um número complexo satisfazendo Re(z)>0 e $(z+i)^2+|z'+i|^2=6$, onde z' é o conjugado de z.

Se n é o menor natural para o qual z^n é um imaginário puro, então n é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

30.(UFAL)Na figura a seguir, os pontos P_1 e P_2 são as respectivas imagens de dois números complexos z_1 e z_2, ambos de módulo r, representados no plano de Argand-Gauss.

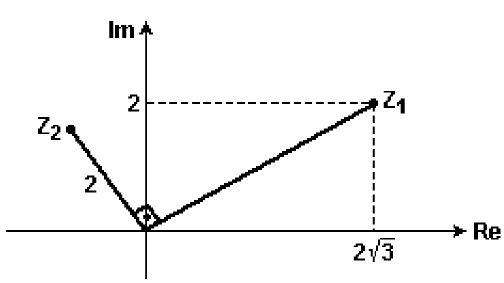


Se θ é o argumento de z_1, analise as afirmações seguintes.
(   ) $z_1 \cdot z_2$ tem módulo r e argumento 2θ.
(   ) z_1/z_2 tem módulo unitário e argumento $-\pi/2$.
(   ) z_2 é conjugado de $1/z_1$.
(   ) $z_2 = i \cdot z_1$.
(   ) $z_1^2 = z_2^2$.

31.(UFPR) Considere os numeros complexos
$z = \cos(\pi/18) + i \operatorname{sen}(\pi/18)$ e $w = 2 [\cos(\pi/9) + i \operatorname{sen}(\pi/9)]$.
a) Mostre que o produto z . w é igual a $(\sqrt{3}) + i$.
b) Mostre que z^{18} é igual a -1.

32.(ITA) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo $1/(1 + i \cot g\, x)$, $x \neq k\pi$, k Æ Z.
a) $|\cos x|$ b) $(1 + \operatorname{sen} x)/2$ c) $\cos^2 x$
d) $|\operatorname{cossec} x|$ e) $|\operatorname{sen} x|$

33. (FGV)A figura indica a representação dos números Z_1 e Z_2 no plano complexo.



Se $Z_1 \cdot Z_2 = a + bi$, então a + b é igual a
a) $4 (1 - \sqrt{3})$. b) $2 [(\sqrt{3}) - 1]$. c) $2 (1 + \sqrt{3})$.
d) $8 [(\sqrt{3}) - 1]$. e) $4 [(\sqrt{3}) + 1]$.

34-Transforme os números complexos abaixo da forma retangular para a forma polar e represente-os graficamente.
a) $(5+j3)$ b) $(3-j2)$ c) (10) d) $(j7)$
e) (-6) f) $(-j3)$ g) $(-4-j3)$ h) $(-5+j2)$
i) $(-j20)$ j) (0)

35- Transforme os números complexos abaixo da forma polar para a forma retangular e represente-os graficamente.
a) ($|c|=5$, $\theta=45º$) b) ($|c|=3$, $\theta=30º$)
c) ($|c|=8$, $\theta=-180º$) d)($|c|=10$, $\theta=36{,}8º$)
e) ($|c|=4$, $\theta=15º$) f) ($|c|=9$, $\theta=90º$)
g) ($|c|=2$, $\theta=-90º$) h) ($|c|=12$, $\theta=0º$)
i) ($|c|=7$, $\theta=180º$)

36-Dados os números complexos ***a***, ***b***, ***c*** e ***d*** abaixo, realize as operações indicadas.

a = $(5+j3)$
b = $(-4-j3)$
c = ($|c|=5$, $\theta=45º$)
d = ($|d|=10$, $\theta=-120º$)

a) **a + b** b) **b – a** c) **a + c** d) **d – b** e) **a** x **b**
f) **a** x **c** g) **c** x **d** h) **d / c** i) **c / a** j) (**a + c**)/**b**
l) (**a** x **d**)/(**b + c**)

37-O número complexo Z = a + bi, tal que $\overline{Z} + 2 Z i = 3$, é igual a:
a) 2i b) -1 + 2i c) 1 - 2i d) -1 - 2i e) -1 – i

38- O valor de é $[(1/2) + (1/2)i]^{100}$ é
a) $(-1/2)^{-50}$
b) $(1/2)^{-50}$
c) -2^{-50}
d) 2^{-50}

39- Considere os números complexos $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 2-2i$. Se $w = (z_1 - z_2)^2$, então:
a) w = 10 - 6i
b) w = - 8 - 6i
c) w = - 8 + 6i
d) w = 10 + 6i
e) w = 8 + 6i

GABARITO – Nº Complexos										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	e	e	c	e	a	d	e	d	b
1	c		d	04			d			a
2	03			b	b	c	a	05	b	b
3			e	a						

15-02,04,16 22.a=1/2 e b=-1/2
30. F V F V F